第16講　群数列

16　次の各問いに答えよ．

(1)　次のように，正の偶数を順に第 n 群に n 個の偶数が入るように分けた．

$$\{2\},\ \{4,\ 6\},\ \{8,\ 10,\ 12\},\ \{14,\ 16,\ 18,\ 20\},\ \{22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30\},\ \cdots\cdots$$

このとき，第 n 群に属している項の初項と末項，そして総和を求めよ．また，20000 は第何群に属していて，その群の中で何項目であるかを求めよ．

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n-p$ $(p\neq1)$，$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$ (q は自然数) で定められる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える．$\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき，$\{a_n\}$ の第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　群数列

16　次の各問いに答えよ．

(1)　正の奇数の列 1，3，5，7，9，11，… を

[1]，[3，5]，[7，9，11]，[13，……]，……

のように，順番に 1 個，2 個，3 個，… ずつのブロックに区切るものとする．

(i)　100 番目のブロックの最初の数を求めよ．

(ii)　100 番目のブロックに現れる 100 個の数の和を求めよ．

(2)　数列 $\{a_N\}$ $(N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ において，$\{a_1,\ a_2\}$ を第 1 区，$\{a_3,\ a_4,\ a_5\}$ を第 2 区，$\{a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}$ を第 3 区とし，以下 $\{a_N,\ a_{N+1},\ a_{N+2},\ \cdots\cdots,\ a_{N+n}\}$ を第 n 区，$\{a_{N+n+1},\ a_{N+n+2},\ a_{N+n+3},\ \cdots\cdots,\ a_{N+2(n+1)}\}$ を第 $(n+1)$ 区とするとき，以下の設問に答えよ．ただし，$a_1=1$ とし，第 n 区 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は公差が n の等差数列であり，$a_{N+n+1}-a_{N+n}=n+1$ を満たすものとする．

(i)　N を n で表せ．

(ii)　a_N，a_{N+n} を n で表せ．

【選択肢】

(1)　(i)　㋐　10000　　㋑　9901　　㋒　9900

(ii)　㋐　1000000　　㋑　560000　　㋒　20000

(2)　(i)　㋐　$N=\frac{1}{2}n(n-1)$　　㋑　$N=\frac{1}{2}n(n+1)$　　㋒　$N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(ii)　㋐　$a_N=\frac{1}{3}(n-1)(n^2-2n+3)$，$a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

㋑　$a_N=\frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)$，$a_{N+n}=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

㋒　$a_N=\frac{1}{3}n(n^2+2)$，$a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　群数列

16　次の各問いに答えよ．

(1)　次のように，正の偶数を順に第 n 群に n 個の偶数が入るように分けた．

$\{2\}, \{4, 6\}, \{8, 10, 12\}, \{14, 16, 18, 20\}, \{22, 24, 26, 28, 30\}, \cdots\cdots$

このとき，第 n 群に属している項の初項と末項，そして総和を求めよ．また，20000 は第何群に属していて，その群の中で何項目であるかを求めよ．

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n-p$ $(p\neq 1)$，$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$（q は自然数）で定められる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える．$\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき，$\{a_n\}$ の第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

【答】 (1) 初項，末項，総和は順に n^2-n+2，$n(n+1)$，$n(n^2+1)$，　20000 は第 141 群の 130 項目　(2) $T_m=\dfrac{2p(p-1)q-p^{\frac{3m-4}{2}q}(p^{2q}-1)}{(p-1)^2}$

【解答】

(1)　第 $(n-1)$ 群までには

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)\quad 項$$

の偶数が並ぶことになるので，第 n 群における初項と末項の最初からの項数はそれぞれ

$$2\times\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=\boldsymbol{n^2-n+2}$$

$$2\times\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{n(n+1)}$$

となる．第 n 群の総和は，項数が n の等差数列であるので

$$\frac{n\{(n^2-n+2)+(n^2+n)\}}{2}=\boldsymbol{n(n^2+1)}$$

また，20000 が第 n 群に属しているとすると

$$n^2-n+2\leqq 20000\leqq n^2+n$$

が成り立つが，これを満たす自然数 n は

$$141^2-141+2=19742,\qquad 141^2+141=20022$$

より $n=141$ となる．ここで

$$\frac{20000-19742}{2}+1=130$$

であるから，20000 は**第 141 群の 130 項目**に現れる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$p\neq1$ より，漸化式 $a_{n+1}=pa_n-p$ は

$$a_{n+1}+\frac{p}{1-p}=p\left(a_n+\frac{p}{1-p}\right)$$

と変形できるので

$$a_n+\frac{p}{1-p}=\left(a_1+\frac{p}{1-p}\right)p^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{p^{n-1}-p}{1-p}$$

また階差 $b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}q$ より，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}q\\&=q+\frac{q\{1-(-1)^{n-1}\}}{1-(-1)}\\&=q+\frac{q\{1-(-1)^{n-1}\}}{2}\end{aligned}$$

となり，$b_1=q$ であるから $n=1$ のときにも成り立つ．

$$\therefore\quad b_n=\begin{cases}q & (n:\text{奇数})\\ 2q & (n:\text{偶数})\end{cases}$$

第 $(m-1)$ 区画までの項数は

$$\begin{aligned}&q+2q+q+\cdots\cdots+q+2q+q\\&=q\times\left(\frac{m-2}{2}+1\right)+2q\times\frac{m-2}{2}\\&=\frac{(3m-4)q}{2}\end{aligned}$$

であるので，第 m 区画の初項は　$a_{\frac{(3m-4)q}{2}+1}=\dfrac{1}{1-p}p^{\frac{(3m-4)q}{2}}-\dfrac{p}{1-p}$　である．

また，T_m の項数は $2q$ である．

ここで，$\{a_n\}$ の第 R 項から先の $2q$ 個の項の和を考えると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-p}\{p^{R-1}+p^R+p^{R+1}+\cdots\cdots+p^{R+2q-1}\}-\frac{p}{1-p}\times2q\\&=\frac{1}{1-p}\left\{\frac{p^{R-1}(1-p^{2q})}{1-p}\right\}-\frac{p}{1-p}\times2q\end{aligned}$$

であるから，

第 m 区画の初項より $R=\dfrac{(3m-4)q}{2}+1$ と置き換えて

$$\begin{aligned}T_m&=\frac{1}{1-p}\left\{p^{\frac{(3m-4)q}{2}}\cdot\frac{1-p^{2q}}{1-p}\right\}-\frac{p}{1-p}\times2q\\&=\boldsymbol{\frac{2p(p-1)q-p^{\frac{3m-4}{2}q}(p^{2q}-1)}{(p-1)^2}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　群数列

16　次の各問いに答えよ.

(1)　正の奇数の列 1, 3, 5, 7, 9, 11, … を

[1], [3, 5], [7, 9, 11], [13, ……], ……

のように，順番に 1 個，2 個，3 個，… ずつのブロックに区切るものとする.

(i)　100 番目のブロックの最初の数を求めよ.

(ii)　100 番目のブロックに現れる 100 個の数の和を求めよ.

(2)　数列 $\{a_N\}$ $(N=1, 2, 3, \cdots)$ において，$\{a_1, a_2\}$ を第 1 区，$\{a_3, a_4, a_5\}$ を第 2 区，$\{a_6, a_7, a_8, a_9\}$ を第 3 区とし，以下 $\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\cdots, a_{N+n}\}$ を第 n 区，$\{a_{N+n+1}, a_{N+n+2}, a_{N+n+3}, \cdots\cdots, a_{N+2(n+1)}\}$ を第 $(n+1)$ 区とするとき，以下の設問に答えよ．ただし，$a_1=1$ とし，第 n 区 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は公差が n の等差数列であり，$a_{N+n+1}-a_{N+n}=n+1$ を満たすものとする.

(i)　N を n で表せ.

(ii)　a_N, a_{N+n} を n で表せ.

【選択肢】

(1) (i)　㋐　10000　㋑　9901　㋒　9900

(ii)　㋐　1000000　㋑　560000　㋒　20000

(2) (i)　㋐　$N=\frac{1}{2}n(n-1)$　㋑　$N=\frac{1}{2}n(n+1)$　㋒　$N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(ii)　㋐　$a_N=\frac{1}{3}(n-1)(n^2-2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$

㋑　$a_N=\frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n+3)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

㋒　$a_N=\frac{1}{3}n(n^2+2)$, $a_{N+n}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

【答】　(1) (i) ㋑　(ii) ㋐　(2) (i) ㋑　(ii) ㋒

【解答】

(1)　(i)　100 番目のブロックの最初の数は，正の奇数の列の最初から

$$1+2+3+\cdots\cdots+99+1=\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100+1=4951\ (\text{番目})$$

になるので，$2\times 4951-1=$ **9901**

(ii)　100 番目のブロックの最後の数は

$9901+2\times 99=10099$

となるので，求める和は　$\frac{100(9901+10099)}{2}=$ **1000000**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)（i）第 n 区の最初の項が a_N であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$N = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)+1$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ.

（ii）各区内はそれぞれ等差数列，第 n 区の末項から第 $(n+1)$ 区の初項への階差は $n+1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_N = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k + n$$
$$= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+2)}$$

$a_1=1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ．よって

$$a_{N+n} = a_N + n \times n$$
$$= \frac{1}{3}n(n^2+2) + n^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。